www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ANNEE 1989

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR

PREMIERE EPREUVE A OPTION

MATHEMATIQUES T - TA

—==oOOo==—

(Durée : 3 h 00 - Cœfficient : 9)

—==oOOo==—

Ce sujet est réservé aux candidats ayant choisi l'option T ou TA lors du dépôt de candidature. Le changement d'option n'est pas autorisé.

—==oOOo==—

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

—==oOOo==—

Soient $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles à 2 lignes et 2 colonnes, $\delta_2(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $M_2(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3, $\mathcal{R}$ un repère orthonormé direct de $\mathcal{A}$, d'origine Ω et de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

A toute matrice $S = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{bmatrix}$ de $\delta_2(\mathbb{R})$, on associe le point S_1 de $\mathcal{A}$ de coordonnées (X,Y,Z) dans le repère $\mathcal{R}$.

On note $S_1 = \Phi(S)$.

On se propose de trouver une matrice M de $M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = S$, avec S donnée dans $\delta_2(\mathbb{R})$.

On notera $M = \begin{bmatrix} x & y \\ t & z \end{bmatrix}$, et tr M la trace de M : tr M = x + z.

Soit (E) l'équation $M^2 = S$.

1.] On suppose dans cette question S = 0.

a) Si M est solution de (E), que dire du déterminant de M ? et de tr M ?

b) Existe-t-il des matrices M dans $\delta_2(\mathbb{R})$ solutions de (E) ?

c) Déterminer toutes les solutions de (E).

d) Trouver, pour chacune des matrices M non nulles solutions de (E), une matrice Q inversible de $M_2(\mathbb{R})$ telle que

$$Q^{-1}MQ = J, \quad \text{avec} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

T.S.V.P.

ECOLES MILITAIRES:ECOLE de l'AIR
Opt.1 et 1A-Math.option.1

2.) On suppose dans cette question $S \neq 0$ et S non inversible.

On pose $tr\,S = \alpha$.

a) Montrer qu'il existe P inversible dans $M_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}SP$ soit diagonale.

Peut-on choisir P orthogonale ?

b) On pose alors $P^{-1}MP = M'$.

Montrer que M' est nécessairement diagonale et de trace non nulle.

c) Déterminer toutes les solutions de (E) et montrer que, lorsqu'elles existent, elles appartiennent à $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Les exprimer au moyen de S et de α.

3.) Soit (C) l'ensemble des points $S_1 = \Phi(S)$ de $\mathcal{A}$ tels que S soit non inversible.

a) Quelle est la nature géométrique de cet ensemble (C) ?

b) Quel est le sous-ensemble de (C) tel que (E) admette des solutions ?

Quel est alors l'ensemble des points $M_1 = \Phi(M)$ tels que M soit solution de (E) ?

c) Déterminer un repère orthonormé direct $(\Omega, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de $\mathcal{A}$ dans lequel l'équation de (C) soit réduite en carrés, et donner cette équation réduite.

d) Soit Γ l'intersection de (C) et du plan (Π) passant par les points A_1, A_2, A_3 qui ont pour coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ initial : $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, $A_3(0,0,1)$.

Montrer qu'il existe (au moins) une sphère dont l'intersection avec (Π) soit Γ ; préciser son centre et son rayon.

Représenter dans le plan (Π) la courbe Γ et le triangle $A_1A_2A_3$.

e) L'équation (E) admet-elle des solutions pour tout point S_1 situé sur Γ ?

Soit alors M une telle solution.

Montrer que le point $M_1 = \Phi(M)$ décrit une courbe (Y) intersection de (C) et d'une surface Σ d'équation $(x + z)(x + y + z) = 1$.

Préciser la nature de Σ, ses génératrices rectilignes, et la nature de la courbe d'intersection de Σ et d'un plan perpendiculaire à l'une de ces génératrices.

4.) On suppose enfin S inversible.

a) Montrer que si S possède deux valeurs propres distinctes, toute solution M de (E) est dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

Quel est alors l'ensemble des points $S_1 = \Phi(S)$ tels que (E) ait des solutions ?

Quel est le nombre de ces solutions ?

b) Lorsque S possède une valeur propre double, déterminer l'ensemble des points $S_1 = \Phi(S)$ tels que (E) ait des solutions, et donner une expression générale de ces solutions, en précisant celles qui appartiennent à $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

c) Etudier en fonction de S, dans l'hypothèse générale où S est inversible, si les solutions de (E) sont diagonalisables.

---=oOo=---

page 224 ECOLES MILITAIRES:ECOLE de l'AIR
1989 2 Opt. I et IA-Math. option. 1

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail